MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

DIRECTION GENERALE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR
ET DE L'INSERTION PROFESSIONNELLE (**DGESIP**)

REPUBLIQUE DE CÔTE D'IVOIRE
Union - Discipline - Travail

Institut National Polytechnique
Félix Houphouët – Boigny
SERVICE DES CONCOURS

Concours STIC/GIC session 2017

Composition : <u>Mathématiques 4</u> (analyse)

Durée : 4 Heures

La présentation et la rigueur des solutions seront deux éléments importants dans l'appréciation des copies. Si un candidat est amené à repérer ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Exercice 1 :

Soit $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$, $x \in \mathbb{R}$.

1) Déterminer l'ensemble $D = \{x \in \mathbb{R};\ g(x) \text{ existe}\}$.

2) Calculer g(1) en fonction de e . (e tel que $\ln e = 1$)

3) Montrer que $xg(x) - g(x+1)$ est une constante que l'on calculera.

4) Soit k un entier naturel arbitraire.

Montrer que la série $\sum_{n \geq k+1} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$ est normalement convergente sur $[-k, +\infty[\cap D$.

On désignera la somme de cette série par $R_k(x)$. Exprimer g en fonction de R_k.

5) **a)** Montrer que g est continue sur D.

b) Calculer $\lim_{\substack{x \to 0, \\ x \in D}} xg(x)$ et $\lim_{\substack{x \to 0, \\ x \in D}} g(x)$.

6) Montrer que g admet des dérivées première et seconde. Calculer ces dérivées.

7) **a)** Montrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

b) Donner un développement limité à l'ordre 2 de g au voisinage de +∞.

8) Etudier les variations de g pour x dans]0, +∞[. Préciser la concavité de g et tracer son graphe. (On étudiera le signe de g'(x) et de g''(x) à l'aide d'un encadrement judicieux de chacune de ces fonctions).

Exercice 2 :

Un concierge possède 10 clés sur son trousseau. Lorsqu'il souhaite ouvrir une porte, il choisit une clé au hasard dans son trousseau jusqu'à obtenir la bonne. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de clés à essayer par le concierge pour ouvrir une porte.

1) Déterminer la loi de X si le concierge essaie les clés sans remise, puis la loi de X s'il les essaie avec remise.

2) Le concierge essaie les clés sans remise s'il est sobre et avec remise s'il est ivre. De plus, on sait qu'il est ivre un jour sur 3.

a) Montrer que X admet une espérance, et la déterminer.

b) Aujourd'hui, le concierge a eu besoin de 6 essais pour ouvrir sa porte. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre ?

c) Même question avec 11 essais.

Problème :

Dans tout le problème $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ désigne une fonction continue 2π – périodique.

1) Montrer que f est bornée et uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

On posera désormais $\|f\| = \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |f(t)|$.

2) Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(g_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions telle que $g_n : I \to \mathbb{R}$ et $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction bornée sur I.

Montrer que si la série $\sum\limits_{n\geq 0} g_n$ converge normalement sur I vers une fonction g, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} hg_n$ converge normalement sur I vers la fonction hg.

3) Soit $r \in [0,1[$, $\theta \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$. Etablir les égalités suivantes :

a) $1+2\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n \cos n\theta = \dfrac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}$.

b) $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos(t-x) + 1}dt = 1$

4) On pose pour $r \in [0,1[$, $x \in \mathbb{R}$, $F(x,r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{(1-r^2)f(t)}{r^2 - 2r\cos(t-x) + 1}dt$

a) Démontrer que $F(x,r) = \dfrac{a_0}{2} + \sum\limits_{n=1}^{+\infty} r^n (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, où

pour tout $n\geq 0$, $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$ et $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$.

b) Soit $\lambda \in]0,\frac{\pi}{2}]$. Montrer que

$$F(x,r)-f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{x-\lambda}^{x+\lambda}\frac{(1-r^2)\left(f(t)-f(x)\right)}{r^2-2\cos(t-x)+1}dt+\frac{1}{2\pi}\int_{x+\lambda}^{x-\lambda+2\pi}\frac{(1-r^2)\left(f(t)-f(x)\right)}{r^2-2\cos(t-x)+1}dt.$$

c) En déduire que : $\left|F(x,r)-f(x)\right|\leq \sup\limits_{|t-x|\leq\lambda}\left|f(t)-f(x)\right|+2\frac{1-r^2}{r^2-2\cos\lambda}\|f\|$

d) Montrer que $F(x,r)$ tend vers $f(x)$ uniformément par rapport à $x\in\mathbb{R}$ quand r tend vers 1 par valeurs inférieures.

5) On pose, pour $r\in[0,1[$ et $x\in\mathbb{R}$, $\Phi(x,r)=\arctan\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)$.

a) Montrer que $\frac{\partial\Phi}{\partial x}(x,r)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}r^n\cos nx$.

b) En déduire que $\Phi(x,r)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}r^n\frac{\sin nx}{n}$ et que $\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(x,r)f(x)dx=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{r^n b_n}{n}$.

STIC / GIC Mathématiques 4 (Analyse-Proba)

Eléments de Correction.

<u>Exercice 1</u> : $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}$, $x \in \mathbb{R}$

1) Pour $n \in \mathbb{N}$ la fonction $u_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-n\}$ donc $D \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$, $|u_n(x)| = \frac{1}{n!\,|x+n|} \underset{n\infty}{\sim} \frac{1}{n!\,n}$

$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!\,n}$ Converge donc $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}$ Converge. D'où $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}^-$

2) $g(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{1+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)!} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = -(e^{-1}-1) = 1 - \frac{1}{e}$.

3) $x g(x) - g(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{x+n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+1+n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{x+n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{1}{x+1+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{x+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!} \frac{1}{x+n}$

$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{x+n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{n}{x+n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

4) $k \in \mathbb{N}$, Soit $x \in [-k, +\infty[\cap D$, alors $x \geq -k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tq $n \geq k+1$ alors $x+n \geq 1$

d'où $|u_n(x)| = \frac{1}{n!\,|x+n|} \leq \frac{1}{n!}$ et $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!}$ Converge.

On en déduit que la série $\sum_{n \geq k+1} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}$ Converge normalement sur $[-k, +\infty[\cap D$.

La somme $R_k(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}$ est le reste de la série Convergente $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n}$ donc $g(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n} + R_k(x)$ $\forall x \in D$

5) a) Pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$ est une fonction rationnelle continue sur $\mathbb{R}-\{-n\}$ donc sur D.

Donc la fonction $x \longmapsto \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$ est continue D.

La convergence normale de la série $\sum_{n \geq k+1} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$ sur l'ensemble $[-k,+\infty[\cap D$ entraine sa convergence uniforme sur le même ensemble. Alors la fonction R_k est continue sur $[-k,+\infty[\cap D$, k étant arbitraire dans $\mathbb{N}$.

Comme $g(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$ alors g est continue sur $]0,+\infty[$.

Soit $x_0 \in D$ et $x_0 < 0$, alors $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ tq $x \in [-k_0,+\infty[\cap D$

En effet $k_0 = -E(x_0)$ car $x_0 \notin \mathbb{Z}$ donc $E(-x_0) = -E(x_0) - 1$

Comme g est continue sur $[-k_0,+\infty[\cap D$ alors g est continue en x_0. Finalement g est continue sur D.

b) $xg(x) - g(x+1) = \frac{1}{e}$ $\forall x \in D$. or g est continue en 1 donc $\lim_{x\to 0} g(x+1) = g(1) = 1 - \frac{1}{e}$. La fonction $x \mapsto xg(x)$ admet une limite en 0 et $\lim_{x \to 0} xg(x) = g(1) + \frac{1}{e} = 1$

Ainsi $xg(x) \underset{0}{\sim} 1$ donc $g(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{x}$. On en déduit que g n'a pas de limite en 0. $\lim_{0^+} g = +\infty$, $\lim_{0^-} g = -\infty$.

6) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$ est de classe C^2 sur D

$\forall x \in D$, $u_n'(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\frac{1}{(x+n)^2}$ et $u_n''(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{2}{(x+n)^3}$

On distingue deux cas selon que un segment $[a,b]$ quelconque inclus dans D est dans $]0,+\infty[$ ou dans $]-k-1,-k[$ avec $k \in \mathbb{N}$.

les deux séries $\sum_{n\geq 0} u_n'(x)$ et $\sum_{n \geq 0} u_n''(x)$ sont alternées (à partir du rang $n_0 = k+1$, dans le pire des cas) dont le terme général en valeur absolue décroît vers 0.

Exercice 1

6) On peut alors appliquer le théorème, critère spécial des séries alternées. Ainsi $\sum u_n'(x)$ et $\sum u_n''(x)$ convergent

et $\forall x \in [a,b]$ $\left|\sum_{n\geq N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(x+n)^2}\right| \leq \frac{1}{(N+1)!} \cdot \frac{1}{(N+1+x)^2}$

$$\text{d'où} \quad \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{(x+n)^2}\right| \leq \frac{1}{(N+1)!\,(N+1-|a|)^2}$$

et $\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{2}{(x+n)^3}\right| \leq \frac{2}{(N+1)!\,(N+1+x)^3} \leq \frac{2}{(N+1)!\,(N+1-|a|)^3}$

les deux suites majorantes tendent vers 0 uniformément

Les séries $\sum_{n\geq 0} u_n'$ et $\sum_{n\geq 0} u_n''$ convergent uniformément sur tout segment de D. De plus $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur D vers g.

Finalement g admet une dérivée première et une dérivée seconde :

$$\forall x \in D \quad g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\frac{1}{(x+n)^2}, \quad g''(x) = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{2}{(x+n)^3}.$$

7/ a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n : x \longmapsto \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x+n}$ est continue et vérifie $\lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0$. La série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $]0,+\infty[$ donc le théorème de la limite terme à terme donne

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} u_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to+\infty} u_n(x) = 0. \quad \left(u_0(x) = \frac{1}{x}\right)$$

7) b) Développement limité de g au voisinage de $+\infty$.
On utilise le théorème de la limite terme à terme et convergence uniforme. (2 fois).

$$x g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{x+n} \quad \forall x \in [1,+\infty[.$$

$$\forall x \geq 1 \quad \left| \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{x+n} \right| \leq \frac{1}{n!} \text{ et } \sum \frac{1}{n!} \text{ converge}$$

donc $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{x+n}$ converge $\overset{(CN)}{\text{uniformément}}$ sur $[1,+\infty[$

et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{x}{x+n} = \frac{(-1)^n}{n!}$ donc $\displaystyle x g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = \frac{1}{e}$

Le même théorème permet de montrer que

$$x^2\left(g(x) - \frac{1}{ex}\right) = x^2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{x+n} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{x}\right)$$

$$= x^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{1}{x+n} - \frac{1}{x}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n x}{n!(x+n)}$$

$$x^2\left(g(x) - \frac{1}{ex}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{n!} = \frac{1}{e}$$

Donc $\displaystyle x^2\left(g(x) - \frac{1}{ex}\right) = \frac{1}{e} + o(1) \Leftrightarrow g(x) = \frac{1}{ex} + \frac{1}{ex^2} + \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Rq On peut aussi poser $u = \frac{1}{x}$, $\displaystyle g(x) = h(u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{u}{1+nu}$

$\displaystyle\lim_{+\infty} g = \lim_{0^+} h = 0$, h est de classe C^2 et appliquer la formule de Taylor Young à h à l'ordre 2.

$$h(0) = 0 \quad h'(0) = \frac{1}{e} \quad \text{et} \quad h''(0) = \frac{2}{e}$$

$$g(x) = h(u) = u h'(0) + \frac{u^2}{2} h''(0) + o(u^2) = \frac{1}{ex} + \frac{1}{ex^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

STIC / GIC Mathématiques 4 (Analyse Proba) 3

Exercice 1

8/ Variation de g sur $]0,+\infty[$

g est continue (question 5/a)) deux fois dérivable sur $]0,+\infty[$ (question 6)) et

$\forall x \in]0,+\infty[\quad g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \frac{1}{(x+n)^2}$

et $g''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \cdot \frac{2}{(x+n)^3}$

$g'(x)$ et $g''(x)$ sont les sommes de deux séries alternées qui vérifient ~~le théorème~~ critère spécial des séries alternées donc sont de même signe que leur premier terme.

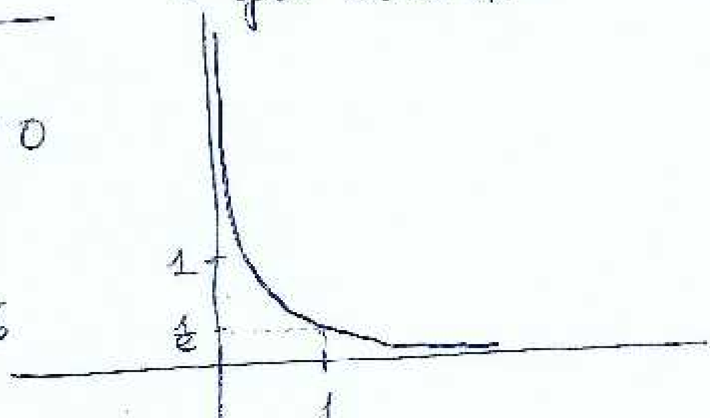
$g(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+2)} + \dots$

et $-\frac{1}{x^2} \leq g'(x) \leq -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \Rightarrow \forall x>0,\ g'(x) \leq 0$

$\frac{2}{x^3} - \frac{2}{(x+1)^2} \leq g''(x) \leq \frac{2}{x^3} \Rightarrow \forall x>0,\ g''(x) \geq 0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		$-$
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$

g est ~~convexe~~ sur $]0,+\infty[$
g est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$



$1 g(1) - g(2) = \frac{1}{e} \simeq 0{,}36$

$g(2) = g(1) - \frac{1}{e} = 1 - \frac{2}{e} \simeq 0{,}26$

$2g(2) - g(3) = \frac{1}{e}$

$g(3) = 2g(2) - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e} \sim 0{,}16$

Problème

1) f étant continue sur $\mathbb{R}$ est bornée sur le segment $[0, 2\pi]$ (théorème des bornes atteintes). Elle est 2π-périodique donc $f(\mathbb{R}) \subset f([0, 2\pi])$ alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, d'après le théorème de Heine f est uniformément continue sur $[a, a+2\pi]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, en posant $n = E\left(\frac{x-a}{2\pi}\right)$ on a

$x \in [a + 2n\pi, a + 2(n+1)\pi] \Leftrightarrow x - 2na \in [a, a+2\pi]$

et $f(x) = f(x - 2n\pi)$. f étant uniformément continue sur $[a, a+2\pi]$ est alors uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

2) La série numérique $\sum_{n \geq 0} \|g_n\|_\infty$ converge

or $\forall x \in I$ $|h(x) g_n(x)| \leq \|h\|_\infty \|g_n\|_\infty$ donc la série $\sum_{n \geq 0} h g_n$ converge normalement sur I. Posons $g = \sum_{n=0}^{\infty} g_n$

Soit $x \in I$ on a $\left| \sum_{k=0}^{n} h(x) g_k(x) - h(x) g(x) \right| = |h(x)| \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} g_k(x) \right|$

$\leq \|h\|_\infty \sum_{k=n+1}^{\infty} \|g_k\|_\infty \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

donc $\sum_{n=0}^{\infty} h g = h \sum_{n=0}^{\infty} g_n = h g$.

3) Soit $r \in [0, 1[$, $\theta \in \mathbb{R}$, $r^n \cos n\theta = \mathrm{Re}\left[(re^{i\theta})^n\right]$

a) or $\sum_{n=0}^{\infty} (re^{i\theta})^n = \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$ donne $1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1-r^2}{r^2 - 2r\cos\theta + 1}$.

b) Posons $g_n : I=[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$
$t \longmapsto r^n \cos n(t-x)$ et $h=f$ bornée

Car f est continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$.

Posons $g : [0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$. $t \longmapsto \dfrac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-x)+1}$ Continue sur I.

$\forall t \in [0,2\pi]$ $|g_n(t)| \leq r^n$ et $\sum_{n\geq 0} r^n$ converge donc la série $\sum g_n$ converge normalement sur I donc uniformément sur I vers g. Donc le théorème d'intégration (terme à terme) s'applique à l'égalité $1+2\sum_{n\geq 1}^{\infty} r^n \cos n(t-x) = \dfrac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-x)+1}$

d'où $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-x)+1}\,dt = 1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \int_0^{2\pi} \cos n(t-x)\,dt = 1.$

4) a) D'après la question 2) la série $\sum f g_n$ converge normalement vers $fg : t \longmapsto \dfrac{(1-r^2)f(t)}{r^2-2r\cos(t-x)+1}$ sur $[0,2\pi]$

On peut alors appliquer le théorème de la convergence uniforme et intégration à l'égalité $\sum_{n=0}^{\infty} f g_n = fg$

donc $F(x,r) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{(1-r^2)f(t)}{r^2-2r\cos(t-x)+1}\,dt = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Big(f(t)+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n f(t)\cos n(t-x)\Big)dt$

or $\cos n(t-x) = \cos nt \cos nx + \sin nt \sin nx$.

donc $F(x,r) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$

où $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt$ $\quad b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt$.

Problème

4) b) $\lambda \in]0, \frac{\pi}{2}]$. De $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt = 1$ on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)f(x)}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt \text{ donc}$$

$$F(x,r) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)[f(t)-f(x)]}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{x-\lambda}^{x-\lambda+2\pi} \frac{(1-r^2)[f(t)-f(x)]}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt$$

Car $t \mapsto f(t)$ et $t \mapsto \cos(t-x)$ sont 2π-périodiques

donc $\int_0^{2\pi} = \int_a^{a+2\pi}$ $a = x-\lambda$.

Par application de l'égalité de Chasles on a

$$F(x,r) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{(1-r^2)[f(t)-f(x)]}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt + \frac{1}{2\pi}\int_{x+\lambda}^{2\pi+x-\lambda} \frac{(1-r^2)[f(t)-f(x)]}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt$$

c) $$\left|\int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{(1-r^2)[f(t)-f(x)]}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt\right| \leq \int_{x-\lambda}^{x+\lambda} \frac{(1-r^2)|f(t)-f(x)|}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt$$

$$\leq \sup_{|t-x|\leq\lambda}|f(t)-f(x)| \int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-x)+1}dt = \sup_{|t-x|\leq\lambda}|f(t)-f(x)|$$

$\forall t \in [0, 2\pi]$ $\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos(t-x)+1} \geq 0$

5) $r \in [0,1[$, $x \in \mathbb{R}$, $\phi(x,r) = \arctan\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)$

a) $$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,r) = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)}{1+\left(\frac{r\sin x}{1-r\cos x}\right)^2} = \frac{r\cos x - r^2}{r^2-2r\cos x+1}$$

or $1+2\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1-r^2}{r^2-2r\cos x+1}$ permet de

déduire que $$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos nx = \frac{1}{2}\left(\frac{1-r^2}{r^2-2r\cos x+1} - 1\right) = \frac{r\cos x - r^2}{r^2-2r\cos x+1}$$
$$= \frac{\partial \phi}{\partial x}(x,r)$$

b) En appliquant les résultats de la question 2) le théorème de la convergence uniforme et intégration justifie les deux égalités demandées –

$$\phi(x,r) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{n} \text{ par intégration de 5/a)}$$

et $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(x,r) f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n b_n}{n} \text{ par intégration}$$

de $$\phi(x,r) f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \frac{\sin nx}{n} f(x).$$

Exercice 2

1) Essais sans remise (Concierge sobre)

$X(\Omega) = [\![1, 10]\!]$

Soit M_p : « la $p^{ième}$ clé est mauvaise »

$(X = k) = M_1 \cap M_2 \cap \cdots \cap M_{k-1} \cap \overline{M_k}$

$P(X=k) = P(M_1)\, P(M_2/M_1) \cdots P(M_{k-1}/M_1 \cap \cdots \cap M_{k-2}) \times P(\overline{M_k}/M_1 \cap \cdots \cap M_{k-1})$

$= \frac{9}{10} \cdot \frac{8}{9} \cdots \frac{10-(k-2)-1}{10-(k-2)} \cdot \frac{1}{10-(k-1)} = \frac{1}{10}$

D'où $X \sim \mathcal{U}([\![1, 10]\!])$

Essais avec remise (Concierge ivre)

X est le nombre d'essais nécessaires pour l'obtention d'un succès lors de répétitions indépendantes d'épreuves de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{10}$.

$X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{10})$, $\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(X=k) = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1} = \frac{9^{k-1}}{10^k}$.

2) a) Soit I : « Concierge ivre »
et S : « concierge sobre ». $P(I) = \frac{1}{3}$, $P(S) = \frac{2}{3}$.

$\forall k \in \mathbb{N}^*$ $P(X=k) = P(X=k \cap I) + P(X=k \cap S)$

$= P(I)\, P(X=k/I) + P(S)\, P(X=k/S)$

$= \frac{1}{3} P(X=k/I) + \frac{2}{3} P(X=k/S)$

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P(X=k) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{9^{k-1}}{10^k} + \frac{2}{3}\sum_{k=1}^{10} \frac{k}{10}.$$

$$= \frac{1}{30} \frac{1}{\left(1-\frac{9}{10}\right)^2} + \frac{2}{30} \cdot \frac{11\times 10}{2} = 7.$$

b) $P(X=6)$ $\quad P(I/X=6)$?

$$P(I/X=6) = \frac{P(I\cap(X=6))}{P(X=6)} = \frac{P(I).P(X=6/I)}{P(I).P(X=6/I)+P(S)P(X=6/S)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{9^5}{10^6}}{\frac{1}{30}\left(\frac{9}{10}\right)^5+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{30}\left(\frac{9}{10}\right)^5}{\frac{1}{30}\left(\left(\frac{9}{10}\right)^5+2\right)} = \frac{9^5}{9^5+2\cdot 10^5}$$

$$\simeq 0{,}228$$

c) $$P(I/X=11) = \frac{P(I)\,P(X=11/I)}{P(I).P(X=11/I)+P(S)\,P(X=11/S)}$$

$P(X=11/S)=0$ car $(X=11/S)=\emptyset$

d'où $P(I/X=11)=1$